OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019
CLASA a VIII-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor ***

Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi punctele *M, N,* şi *P* pe muchiile $(A'D')$, (CC'), respectiv (AB), astfel încât $\frac{A'M}{MD'}=\frac{C'N}{NC}=\frac{BP}{PA}$. Arătaţi că $B'D\perp(MNP)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Din ipoteză deducem că $A'M=C'N=BN$. Rezultă că triunghiurile dreptunghice $A'MB', C'NB'$ şi NBB' sunt congruente (C.C.)	1p
Deducem că $B'M=B'N=B'P$, deci punctul B' se proiectează pe planul (MNP) în centrul cercului circumscris triunghiului *MNP*. (1)	2p
Deasemenea, deoarece $D'M=CN=NA$, rezultă că triunghiurile dreptunghice $DD'M, DCN$ şi DAN sunt congruente (C.C.).	1p
Deducem că $DM=DN=DP$, deci punctul *D* se proiectează pe planul (MNP) în centrul cercului circumscris triunghiului *MNP*. (2)	2p
Din (1) şi (2) rezultă că punctele B' şi *D* se situează pe perpendiculara în centrul cercului circumscris triunghiului *MNP* pe planul (MNP). Rezultă concluzia.	1p

Enunț subiect 2, autor prof. Maria Pop, Cluj Napoca, G.M.

Numerele reale diferite *a, b* şi *c* verifică relaţia: $\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}=11$.

Calculaţi suma $S=\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Notăm $\frac{a}{b-c}=x, \frac{b}{c-a}=y, \frac{c}{a-b}=z$. Astfel, $s^2=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=11+2(xy+yz+zx)$	2p
Din calcul obţinem $xy+yz+zx=\frac{a}{b-c}\cdot\frac{b}{c-a}+\frac{b}{c-a}\cdot\frac{c}{a-b}+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{a}{b-c}=-1$	3p
Obţinem $\lvert S\rvert=\sqrt{11-2}=3$, deci $S\in\{\pm3\}$.	2p

Enunţ subiect 3, autor ***

Determinaţi numerele reale *x*, *y*, şi *z* care îndeplinesc simultan relaţiile:
i) $x^3+y=3x-4$, ii) $y^3+2z=3y-6$ şi iii) $3z^3+x=9z-8$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Relaţia i) este echivalentă cu $(x+2)(x-1)^2=-(y+2)$	2p
Relaţia ii) este echivalentă cu $(y+2)(y-1)^2=-2(z+2)$	1p
Relaţia iii) este echivalentă cu $3(z+2)(z-1)^2=-(x+2)$	1p
Inmulţim cele trei relaţii membru cu membru. Obţinem: $3(x+2)(y+2)(z+2)(x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2=-2(x+2)(y+2)(z+2)$ sau $(x+2)(y+2)(z+2)\left[3(x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2+2\right]=0$ Finalizare $x=y=z=-2$	3p

Enunţ subiect 4, autor prof. Dana Radu, Bucureşti

Fie *a* şi *b* două numere reale. Notăm $\min(a,b)=\begin{cases} a, \text{pentru } a\le b \\ b, \text{pentru } b<a \end{cases}$.

a) Arătați că $\min(a,b)=\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$, oricare ar fi numerele reale *a* și *b*.

b) Determinați numerele reale *x* și *y* știind că:

$$\min\left(2\sqrt{x+y}+3\sqrt{1-x},\ 3\sqrt{x+y}+2\sqrt{37-y}\right)\ge 19 .$$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Justificare $\min(a,b)=\dfrac{a+b-\lvert a-b\rvert}{2}$.	1p
b) Aplicând **a)** obținem : $\left(5\sqrt{x+y}+3\sqrt{1-x}+2\sqrt{37-y}\right)-\left\lvert-\sqrt{x+y}+3\sqrt{1-x}-2\sqrt{37-y}\right\rvert\ge 38$ (1)	1p
Aplicăm inegalitatea C.B.S si obținem: $\left(5\sqrt{x+y}+3\sqrt{1-x}+2\sqrt{37-y}\right)^2\le(25+9+4)(x+y+1-x+37-y)$, echivalent cu $\left(5\sqrt{x+y}+3\sqrt{1-x}+2\sqrt{37-y}\right)\le 38$. (2) Egalitatea are loc pentru $\dfrac{\sqrt{x+y}}{5}=\dfrac{\sqrt{1-x}}{3}=\dfrac{\sqrt{37-y}}{2}$ (3)	2p
Din (1) și (2) rezultă că $5\sqrt{x+y}+3\sqrt{1-x}+2\sqrt{37-y}=38$ și $\left\lvert-\sqrt{x+y}+3\sqrt{1-x}-2\sqrt{37-y}\right\rvert=0$.	1p
Finalizare, utilizând (3), rezultă perechea $x=-8,\ y=33$, care verifică.	2p